数理解析研究所講究録
823巻 1993年 106-117

RECTANGULAR NORMALITY OF PRODUCTS WITH A METRIC FACTOR

静岡大・教育
大田春外 (Haruto OHTA)

無限濃度 κ に対し, $\kappa^{<\omega}=\bigcup_{n\in\omega}\kappa^n$ とおく。位相空間 X の部分集合族 $\{G(\sigma):\sigma\in\kappa^{<\omega}\}$ は,

$$\forall\sigma,\sigma'\in\kappa^{<\omega}\ (\sigma\subseteq\sigma'\Rightarrow G(\sigma)\supseteq G(\sigma')) \tag{1}$$

をみたすとき, monotone decreasing であるという。また κ より小さい個数の X の cozero-sets の和として表わされる集合を X の κ-open set, κ より小さい個数の zero-sets の共通部分として表わされる集合を κ-closed set とよぶ。ω_1-open set と ω_1-closed set は, それぞれ通常の cozero-set と zero-set である。κ より大きい最小の濃度を κ^+ で表わす。次の定理を証明することが目標である。

定理 1. 完全正則空間 X の閉集合 A と無限濃度 κ に対し, 条件 $(*_\kappa)$ 「A と交わらない X の任意の κ^+-closed set B に対し, $h[A]=0$ かつ $h[B]=1$ である $h\in C(X)$

が存在する」が成り立っていると仮定する。このとき，Baire の零次元距離空間 $M = \kappa^\omega$ に対し，次の (a), (b), (c) は同値である。

(a) $A \times M$ は $X \times M$ で C-embedded.

(b) $A \times M$ は $X \times M$ で C^*-embedded.

(c) A は X で C-embedded かつ A の κ^+-open sets からなる任意の monotone decreasing family $\{G(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ で，

$$\forall t \in \kappa^\omega, \ (\bigcap_{\sigma \subseteq t} cl_A G(\sigma) = \phi) \tag{2}$$

をみたすものに対し，X の κ^+-open sets からなる族 $\{H(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ で

$$\forall \sigma \in \kappa^{<\omega}, \ (G(\sigma) \subseteq H(\sigma)) \tag{3}$$

$$\forall t \in \kappa^\omega, \ (\bigcap_{\sigma \subseteq t} cl_X H(\sigma) = \phi) \tag{4}$$

をみたすものが存在する。

証明. (a) → (b) は明白。(b) → (c)：

$\boxed{1}$ まず，A が X で C-embedded であることを注意する。自然に $2^\omega \subseteq \kappa^\omega$ である。いま [H, Theorem 4.16] から $A \times 2^\omega$ は $A \times M$ で C^*-embedded. 従って (b) より，$A \times 2^\omega$ は $X \times 2^\omega$ で C^*-embedded. ゆえに [H, Lemma 4.6] より，A は X で C-embedded.

$\boxed{2}$ $\{G(\sigma):\sigma\in\kappa^{<\omega}\}$ を (2) をみたすような A の κ^+-open sets からなる monotone decreasing family とする。
各 $\sigma\in\kappa^{<\omega}$ に対し，A の zero-sets $Z_{\sigma\beta}$ と A の cozero-sets $W_{\sigma\beta}$ $(\beta\in\kappa)$ で

$$G(\sigma)=\cup_{\beta\in\kappa}Z_{\sigma\beta}=\cup_{\beta\in\kappa}W_{\sigma\beta} \tag{5}$$

$$Z_{\sigma\beta}\subseteq W_{\sigma\beta} \tag{6}$$

をみたすものが存在する。

$\boxed{3}$ 各 $\sigma\in\kappa^{<\omega}$ に対し，異なる2点 $p_\sigma, q_\sigma\in[\sigma]$ $(=\{t\in\kappa^\omega;\ t\supseteq\sigma\})$ を $\{p_\sigma, q_\sigma:\sigma\in\kappa^{<\omega}\}$ が互いに異なる点からなるようにとる。

$\boxed{4}$ $\sigma\in\kappa^n$ と $\beta\in\kappa$ に対し，$\sigma'\restriction n=\sigma$ かつ $\sigma'(n)=\beta$ によって定義される κ^{n+1} の元 σ' を $\sigma^\frown\beta$ によって表わす。

$\boxed{5}$ 各 $\sigma\in\kappa^{<\omega}$ に対し，

$$P_\sigma=\cup_{\beta\in\kappa}(Z_{\sigma\beta}\times\ \ p_{\sigma^\frown\beta}\})$$

$$Q_\sigma=\cup_{\beta\in\kappa}(Z_{\sigma\beta}\times\{q_{\sigma^\frown\beta}\})$$

$$W_\sigma=\cup_{\beta\in\kappa}(W_{\sigma\beta}\times[\sigma^\frown\beta])$$

とおく。このとき (6) より

$$(Z_{\sigma\beta}\times\{p_{\sigma^\frown\beta}\})\cup(Z_{\sigma\beta}\times\{q_{\sigma^\frown\beta}\})\subseteq W_{\sigma\beta}\times[\sigma^\frown\beta]$$

であって，$\{W_{\sigma\beta}\times[\sigma^\frown\beta]\ ;\ \beta\in\kappa\}$ は $A\times M$ の cozero-sets からなる discrete family. 従って [H, Lemma 1.3] より，P_σ と Q_σ は $A\times M$ の zero-sets. また W_σ は $A\times M$ の

cozero-set である.

$\boxed{6}$ $P = \bigcup\{P_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$, $Q = \bigcup\{Q_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ とおく.
(2) より, $\{G(\sigma) \times [\sigma] : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ は $A \times M$ で locally finite. $W_\sigma \subseteq G(\sigma) \times [\sigma]$ だから $\{W_\sigma : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ も $A \times M$ で locally finite. $P_\sigma \cup Q_\sigma \subseteq W_\sigma$ だから, 再び [H, Lemma 1.3] から, P と Q は $A \times M$ の zero-sets.

$\boxed{7}$ $A \times M$ は $X \times M$ で C^*-embedded であって, $P \cap Q = \phi$ だから $g[P] = 0$ かつ $g[Q] = 1$ である $g \in C(X \times M)$ が存在する。各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対し

$$H(\sigma) = \{x \in X : \sup_{t, t' \in [\sigma]} |g(x,t) - g(x,t')| > 2/3\}$$

とおく。

$\boxed{8}$ $H(\sigma)$ は X の κ^+-open set であることを示そう。D を $[\sigma]$ の濃度 κ の dense subset とする。$(t, t') \in D^2$ に対し,

$$U(t,t') = \{x \in X : |g(x,t) - g(x,t')| > 2/3\}$$

は X の cozero-set. $H(\sigma) = \bigcup\{U(t,t') : (t,t') \in D^2\}$ だから, $H(\sigma)$ は κ^+-open.

$\boxed{9}$ $G(\sigma) \subseteq H(\sigma)$ であること: $\forall x \in G(\sigma)$, (5) より $\exists \beta \in \kappa$ s.t. $x \in Z_{\sigma\beta}$. このとき $g(x, p_{\sigma\frown\beta}) = 0$ かつ $g(x, q_{\sigma\frown\beta}) = 1$. ゆえに $x \in H(\sigma)$.

$\boxed{10}$ $t \in \kappa^\omega$ に対し，$\bigcap_{\sigma \subseteq t} cl_X H(\sigma) = \phi$ であること：

$\forall x \in X$，g の連続性より，X に於ける x の nbd U と $\sigma \subseteq t$ で

$$(x', t') \in U \times [\sigma] \Rightarrow |g(x, t) - g(x', t')| < 1/3 .$$

をみたすものが存在する．このとき，$x' \in U$ ならば，$x' \notin H(\sigma)$．

ゆえに $x \notin cl_X H(\sigma)$．

$\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}$ から，X の κ^+-open sets の族 $\{H(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$

は (3)(4) をみたす。ゆえに (c) は成立する．

(c) → (a)：$f \in C(A \times M)$ が $X \times M$ 上へ連続に拡張されることを証明する．

$\boxed{11}$ 各 $k \in \omega$ と各 $\sigma \in \kappa^{<\omega}$ に対し，

$$G_k(\sigma) = \{x \in A : \sup_{t, t' \in [\sigma]} |f(x, t) - f(x, t')| > 1/2^{k+1}\}$$

とおく。このとき $\boxed{8}$ と同様に，$G_k(\sigma)$ は A の κ^+-open set．またその定義から

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow G_k(\sigma) \supseteq G_k(\sigma')$$

$$t \in \kappa^\omega \Rightarrow \bigcap_{\sigma \subseteq t} cl_A G_k(\sigma) = \phi$$

(c) より，各 $k \in \omega$ について，X の κ^+-open sets からなる族 $\{H_k(\sigma) : \sigma \in \kappa^{<\omega}\}$ で

$$\forall \sigma \in \kappa^{<\omega},\ G_k(\sigma) \subseteq H_k(\sigma)$$

$$\forall t \in \kappa^\omega,\ \bigcap_{\sigma \subseteq t} cl_X H_k(\sigma) = \phi$$

をみたすものが存在する。またこのとき

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow H_k(\sigma) \supseteq H_k(\sigma')$$

であると仮定してよい。

$\boxed{12}$ 各 $k \in \omega$ と $\sigma \in K^{<\omega}$ に対し，$F_k(\sigma) = X \setminus H_k(\sigma)$ とおけ，このとき

$$F_k(\sigma) \text{ は } X \text{ の } K^+\text{-closed set} \tag{7}$$

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow F_k(\sigma) \subseteq F_k(\sigma') \tag{8}$$

$$t \in K^\omega \Rightarrow \bigcup_{\sigma \subseteq t} \operatorname{int}_X F_k(\sigma) = X \tag{9}$$

$$x \in F_k(\sigma) \cap A \Rightarrow \sup_{t, t' \in [\sigma]} |f(x,t) - f(x,t')| \leq 1/2^{k+1} < 1/2^k \tag{10}$$

$\boxed{13}$ 各 $\sigma \in K^{<\omega}$ について，$t_\sigma \in [\sigma]$ を任意に選んで固定する。

$$f_\sigma(x) = f(x, t_\sigma) \quad ; \quad x \in A$$

によって，$f_\sigma \in C(A)$ を定義せよ。このとき (8) と (10) から

$$\sigma \subseteq \sigma' \Rightarrow {}^\forall x \in F_k(\sigma) \cap A,$$
$$|f_\sigma(x) - f_{\sigma'}(x)| < 1/2^k \tag{11}$$

$\boxed{14}$ $\mathrm{dom}(\sigma) = n$ 上の induction で，f_σ を次の条件 (12) をみたすように $g_\sigma \in C(X)$ に拡張する。

$$\sigma \subseteq \sigma',\ k \leq \mathrm{dom}(\sigma)$$
$$\Rightarrow {}^\forall x \in F_k(\sigma),\ |g_\sigma(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^k \tag{12}$$

induction の手順を以上に述べる。

$K^0 = \{\phi\}$ と考え，f_ϕ を $g_\phi \in C(X)$ へ任意に拡張する。このことは A が X で C-embedded であることから可能である。

$\sigma \in K^m$ $(m \leq n)$ に対しては，f_σ は (12) をみたすように $g_\sigma \in C(X)$ に拡張されたと仮定する。

$\sigma' \in K^{n+1}$ とせよ．まず $f_{\sigma'}$ を $\bar{f}_{\sigma'} \in C(X)$ に任意に拡張する．

$$B = \bigcup_{\sigma \subsetneqq \sigma'} \bigcup_{k \leq dom(\sigma)} \left(\{x \in X : |g_\sigma(x) - \bar{f}_{\sigma'}(x)| \geq 1/2^k\} \cap F_k(\sigma) \right)$$

とおく。K^+-closed sets の有限和は K^+-closed だから，B は X の K^+-closed set. また (11) より $A \cap B = \phi$. 従って条件 $(*_K)$ より，$h[A] = 1$，$h[B] = 0$ かつ $0 \leq h \leq 1$ をみたす $h \in C(X)$ が存在する．$g_{\sigma'} \in C(X)$ を

$$g_{\sigma'} = g_{\sigma'\restriction n} - h(g_{\sigma'\restriction n} - \bar{f}_{\sigma'})$$

によって定義する．このとき $h[A] = 1$ だから $g_{\sigma'}\restriction A = \bar{f}_{\sigma'}\restriction A = f_{\sigma'}$. (12) をみたすことを示すために，$\sigma \subseteq \sigma'$, $k \leq dom(\sigma)$ とする．$\sigma \neq \sigma'$ の場合だけを考えればよい。任意の $x \in F_k(\sigma)$ に対し，帰納法仮定より

$$|g_\sigma(x) - g_{\sigma'\restriction n}(x)| < 1/2^k \tag{13}$$

CASE 1. $x \in B$ のとき．$h[B] = 0$ だから $g_{\sigma'}(x) = g_{\sigma'\restriction n}(x)$. ゆえに (13) より $|g_\sigma(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^k$.

CASE 2. $x \notin B$ のとき，B の定義から

$$|g_\sigma(x) - \bar{f}_{\sigma'}(x)| < 1/2^k. \tag{14}$$

また $0 \leq h \leq 1$ だから，$g_{\sigma'}$ の定義より

$$g_{\sigma'\restriction n}(x) \leq g_{\sigma'}(x) \leq \bar{f}_{\sigma'}(x) \quad \text{または}$$

$$\bar{f}_{\sigma'}(x) \leq g_{\sigma'}(x) \leq g_{\sigma' \restriction n}(x). \tag{15}$$

(13)(14)(15) より $|g_\sigma(x) - g_{\sigma'}(x)| < 1/2^k$. ゆえに induction は完成した。

$\boxed{15}$ $g \in C(X \times M)$ を次のように定義する.

$$g(x, t) = \lim_{\sigma \subseteq t} g_\sigma(x) \quad ; \ (x, t) \in X \times M.$$

$\{g_\sigma(t) : \sigma \subseteq t\}$ が収束することを確かめておく。$\forall \varepsilon > 0$, $1/2^k < \varepsilon$ である $k \in \omega$ をとれ。(9) より, $x \in F_{k+1}(\sigma)$ かつ $\mathrm{dom}(\sigma) \geq k+1$ である $\sigma \subseteq t$ が存在する。このとき, $\sigma \subseteq \sigma_i \subseteq t$ $(i = 1, 2)$ ならば, (12) より

$$\begin{aligned} |g_{\sigma_1}(x) - g_{\sigma_2}(x)| &\leq |g_\sigma(x) - g_{\sigma_1}(x)| + |g_\sigma(x) - g_{\sigma_2}(x)| \\ &< 1/2^{k+1} + 1/2^{k+1} = 1/2^k < \varepsilon \end{aligned}$$

ゆえに $\{g_\sigma(x) : \sigma \subseteq t\}$ は収束する. g が f の連続な拡張であることを証明すればよい。

$\boxed{16}$ $g \restriction (A \times M) = f$ であること: $\forall (x, t) \in A \times M$, 各 $\sigma \subseteq t$ に対し $x \in A$ だから $g_\sigma(x) = f_\sigma(x) = f(x, t_\sigma)$. $\lim_{\sigma \subseteq t} t_\sigma = t$ だから, f の連続性より

$$g(x, t) = \lim_{\sigma \subseteq t} g_\sigma(x) = \lim_{\sigma \subseteq t} f(x, t_\sigma) = f(x, t).$$

$\boxed{17}$ 最後に g が連続であることを示す。$\forall (x, t) \in X \times M$ $\forall \varepsilon > 0$ (fixed), $1/2^k < \varepsilon$ である $k \in \omega$ をとれ, (8), (9) と

g の定義から

$$\mathrm{dom}(\sigma) \geqq k+2,$$

$$x \in \mathrm{int}_X F_{k+2}(x), \tag{16}$$

$$|g(x,\tau) - g_\sigma(x)| < 1/2^{k+2} \tag{17}$$

をみたす $\sigma \subseteq t$ が存在する。g_σ の連続性から

$$x' \in V \Rightarrow |g_\sigma(x) - g_\sigma(x')| < 1/2^{k+2} \tag{18}$$

である x の nbd V が存在する。(16) より $V \subseteq F_{k+2}(\sigma)$ であると仮定してよい。このとき (12) より

$$\sigma \subseteq \sigma',\ x' \in V \Rightarrow |g_\sigma(x') - g_{\sigma'}(x')| < 1/2^{k+2}. \tag{19}$$

任意の $(x', \tau') \in V \times [\sigma]$ をとれ。このとき $\tau' \in [\sigma]$ だから $\sigma \subseteq \tau'$。$\sigma \subseteq {}^\forall\sigma' \subseteq \tau'$ に対して、(19) より

$$|g_\sigma(x') - g_{\sigma'}(x')| < 1/2^{k+2}$$

ゆえに

$$|g_\sigma(x') - g(x',\tau')| \leqq 1/2^{k+2} \tag{20}$$

(17)(18)(20) より

$$\begin{aligned}
&|g(x,\tau) - g(x',\tau')| \\
&\leqq |g(x,\tau) - g_\sigma(x)| + |g_\sigma(x) - g_\sigma(x')| + |g_\sigma(x') - g(x',\tau')| \\
&< 1/2^{k+2} + 1/2^{k+2} + 1/2^{k+2} < 1/2^k < \varepsilon
\end{aligned}$$

ゆえに $g \in C(X \times M)$.

$\boxed{16}$ $\boxed{17}$ より、(a) は成立する。□□

注意1. 定理1で条件($*_\kappa$)は, (c)→(a)を証明するためだけに使われる. AがXでC-embeddedならば, ($*_\omega$)は自動的にみたされるので, $\kappa=\omega$の場合, 条件($*_\kappa$)は不要である. さて, $A\times\kappa^\omega$が$X\times\kappa^\omega$でC^*-embeddedならば, $A\subseteq X$は条件($*_\kappa$)をみたすか? 更に一般的にこの問題を述べるために

$$lw(M)=\sup\{w(t,M): t\in M\},$$

但し $w(t,M)=\min\{w(V): V$はtのnbd$\}$, と定義する。Mを$lw(M)=\kappa$である距離空間とする。このとき, $A\times M$が$X\times M$でC^*-embeddedならば, $A\subseteq X$は($*_\kappa$)をみたすか?

注意2. 定理1はPrzymusinski [P, Proposition 5]から$A\times M$がM-independentであるという仮定を取り除くことが出来る可能性を示している。[P, Proposition 5]は, $A\subseteq X$が条件($*_\kappa$)をみたすことを要求していないが, Przymusinskiの(iii)→(i)の証明は, ($*_\kappa$)を必要としているように思う。少なくとも[P, Proposition 5]が($*_\kappa$)なしで証明できるかどうか, 或いは, (iii)から($*_\kappa$)が導びかれるかどうか分らない。定理1の(b)→(c)は本質的に[P, Proposition 5]の(ii)→(iii)に含まれる。ただし, 彼の(ii)→(iii)の証明は, $w(M)=\kappa$である

距離空間 M は，空でない open sets からなる濃度 κ の discrete family を含むことを使っている。ところが，$cf(\kappa) = \omega$ の場合は，これは必ずしも正しくない。例えば，$M = \omega_\omega + 1$ とし，ω_ω の basic nbd は通常の順序位相によるもの，ω_ω 以外の各点は孤立点として M に位相を与える。このとき，$w(M) = \omega_\omega$ であるが，M は空でない open sets からなる濃度 ω_ω の discrete family を含まない。この gap は藤井清治氏によって指摘されたものである。

最後に当面の目標である，Hoshina, Przymusiński, Wasko 等による問題を挙げる。

<u>問題</u> 1. M を距離空間とする。このとき，$A \times M$ が $X \times M$ で C^*-embedded であるための，$A \subseteq X$ の必要十分条件を求めよ。また $A \times M$ が $X \times M$ で C^*-embedded ならば，それは $X \times M$ で C-embedded か。

<u>問題</u> 2. X の任意の閉集合 A と任意の距離空間 M に対して，$A \times M$ が $X \times M$ で C^*-embedded であるような位相空間 X を特徴付けよ。

参考文献

[H] T. Hoshina, Extensions of mappings II, in: K. Morita and J. Nagata eds. Topics in General Topology, North-Holland (1989), 41-80.

[P] T. C. Przymusinski, Notes on extendability of continuous functions from products with a metric factor, preprint, (1983).

この話題に関連するもの：

T. Hoshina, Extensions of mappings, to appear in: M. Husek and J. van Mill eds. Recent Progress in General Topology, North-Holland (1992)

H. Ohta, Extensions of zero-sets in the product of topological spaces, Topology Appl. 35 (1990), 21-39.

T. C. Przymusinski, Product spaces, in: G. M. Reed ed. Surveys in General Topology, Academic Press (1980), 399-429.

---------, Extending functions from products with a metric factor and absolutes, Pacific J. Math. 101 (1982), 463-475.

---------, A solution to a problem of E. Michael, Pacific J. Math. 114 (1984), 235-242.

A. Wasko, Extensions of functions defined on product spaces, Fund. Math. 124 (1984), 27-39.

--------, Extensions of functions from products with compact or metric factors, Fund. Math. 125 (1985), 81-88.